ProScientia Referat am 24.03.2015
Schubernig Manuela, Leoben

Modellübertragung in der Verfahrenstechnik

Modellübertragung

Unter Modellübertragung wird ein „Scale-up“ bzw. „Scale-down“ zwischen Modell- oder Versuchsanlagen und einer industriellen Großanlage verstanden. Um eine korrekte Maßstabsübertragung zu gewährleisten, ist eine **dimensionshomogene Formulierung** notwendig, d.h. die Gültigkeit einer mathematischen oder physikalischen Formulierung muss in jedem Fall gewährleistet sein.

Dimension und Einheit

Wenn von Dimensionen gesprochen wird, so ist zu beachten, dass eine **Dimension keine Einheit** ist. Dies soll Beispielhaft an SI-Einheiten und bekannten sekundären Maßeinheiten in nachfolgender Tabelle 1 veranschaulicht werden.

Tabelle 1:Grundgrößenarten und ihre Dimensionen gemäß dem SI System und bekannte sekundäre Maßeinheiten

Grundgröße	Dimension	Grundmaßeinheit	
Länge	L	m	Meter
Masse	M	kg	Kilogramm
Zeit	T	s	Sekunde
Temperatur	Θ	K	Kelvin
Kraft	MLT^{-2}	$N \equiv kgms^{-2}$	Newton
Leistung	ML^2T^{-3}	$W \equiv kgm^2s^{-3}$	Watt

Hinzu kommen noch Dimensionskonstanten wie z.B. die allgemeine Gaskonstante R in den Dimensionen $ML^2T^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}$ (8,313 [J/(molK)]) oder die Gravitationskonstante G in $[M^{-1}L^3T^{-2}]$ ($6{,}673 \cdot 10^{-11}$ $[m^3/(kgs^2)]$), welche die Funktion haben, bereits festgelegte sekundäre Dimensionen und physikalische Beziehungen nicht zu verletzten. Beispielsweise die Definition der Arbeit W = pV $[ML^2T^{-2}]$ und das allgemeine Gasgesetz pV = n**R**T.

Dimensionsanalyse

Mittels einer sogenannten Dimensionsanalyse wird überprüft, ob ein physikalischer Zusammenhang dimensionslos formuliert werden kann. Hierfür sind zwei Schritte notwendig:

1. **Relevanzliste** erstellen
    a. Listung aller Parameter, mit denen das Problem beschrieben wird

   b. Zielgröße: ist die gesuchte Größe, einzige abhängige Größe
   c. Einflussgrößen: beeinflussen die Zielgröße und sollten untereinander linear unabhängig sein
2. **Dimensionshomogenität** des Zusammenhangs **prüfen**
   a. Sogenanntes „pi-Theorem“ erstellen
   b. Pi = Π = Produkt
   c. Erarbeitung bzw. Erstellung mittels Matrizenumformung

Beispiel einer Dimensionsanalyse

Als Beispiel sei der Druckverlust in einem geraden, glatten Rohr ohne Einlaufeffekte gesucht. Als erstes wird die Relevanzliste erstellt und im Anschluss die Dimensionshomogenität geprüft.

- **Relevanzliste**: Die Zielgröße ist der Druckverlust Δp, die Einflussgrößen setzen sich aus Parametern der Geometrie (Durchmesser d, Rohrlänge l), Stoffparametern (Dichte ρ, kinematische Viskosität ϑ) und Prozessparametern (Volumendurchsatz q) zusammen. Die Relevanzliste lautet daher **{Δp; d, l; ϑ, ρ; q}**.

- **Dimensionshomogenität prüfen:** Erstellung der Matrix: die Parameter der Relevanzliste werden in den Spalten gelistet, die in den Parametern vorkommenden Dimensionen werden in den Zeilen gelistet und die Potenzen der Dimensionen befüllen die Matrix (siehe Abbildung 1, linke Matrix).

Im Anschluss werden mathematische Umformungen durchgeführt um die Matrix in eine Einheitsmatrix zu überführen. Diese Schritte sind in nachfolgender Abbildung 1 dargestellt.

		ρ	d	ϑ	Δp	q	l			ρ	d	ϑ	Δp	q	l			ρ	d	ϑ	Δp	q	l
Masse	M	1	0	0	1	0	0		Z1 = M	1	0	0	1	0	0		Z'1 = Z1	1	0	0	1	0	0
Länge	L	-3	1	2	-1	3	1		Z2 = 3M + L	0	1	2	2	3	1		Z'2 = Z2 - 2 Z3	0	1	0	-2	1	1
Zeit	T	0	0	-1	-2	-1	0		Z3 = -T	0	0	1	2	1	0		Z'3 = Z3	0	0	1	2	1	0
		Kernmatrix			Restmatrix																		

Abbildung 1: Matrix als Grundlage zur Erstellung des pi-Theorems

Aus der Matrix wird das pi-Theorem erstellt, es entstehen drei dimensionslose Kennzahlen Π_1, Π_2, Π_3.

1. $\Pi_1 \equiv \Delta p/(\rho^1 d^{-2} \vartheta^2) = \Delta p d^2/(\rho \vartheta^2)$
2. $\Pi_2 \equiv q/(\rho^0 d^1 \vartheta^1) = q/(d\vartheta)$
3. $\Pi_3 \equiv l/(\rho^0 d^1 \vartheta^0) = l/d$

Aus diesen Kennzahlen kann folgende, bekannte Erkenntnis gewonnen werden:

- $\Pi_2 \equiv Re$ … Reynolds-Kennzahl
- $\Pi_1 \Pi_2^{-2} \equiv \Delta p d^4/(\rho q^2) \equiv Eu$ … Euler-Zahl
- $\Pi_1 \Pi_2^{-2} \Pi_3 \equiv Eu\ d/l \equiv \zeta$ … Widerstandsbeiwert

Werden zwei dieser Kennzahlen in einem Diagramm (siehe Abbildung 2) dargestellt, so ergibt sich die Druckverlust-Charakteristik eines glatten Rohres. Diese Abbildung wurde bereits 1914 von Stanton &

Panell veröffentlich. Es lassen sich daraus die drei Strömungsbereiche laminar, Übergangsregime und turbulent erkennen.

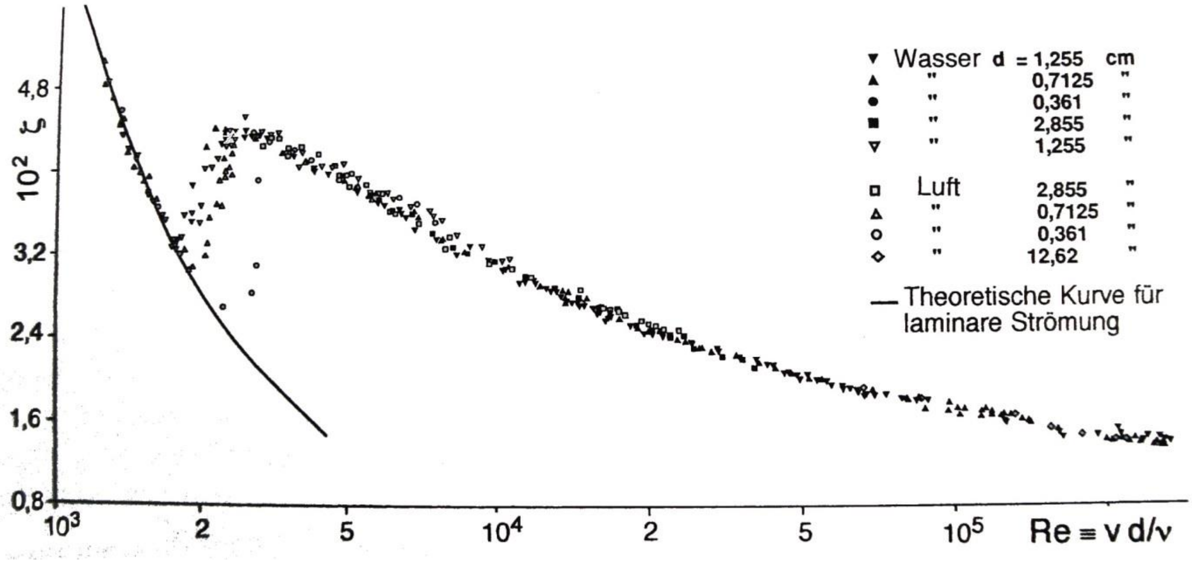

Abbildung 2: Druckverlust-Charakteristik eines glatten Rohres nach Stanton & Panell.

Der Vorteil dieser Darstellung wurde 1961 von B. Eck so beschrieben, dass wenn, wie es früher geschah, ζ in Abhängigkeit der Geschwindigkeit aufgetragen wird, keine Kurve sondern ein „Sternenhimmel“ das Ergebnis ist. Eck schlussfolgerte, dass das Reynolds‘sche Gesetz sich bei dieser Gelegenheit bereits dem Anfänger mit elementarer Wucht darstellen dürfte. So wird der 5-parametrige Zusammenhang {Δp; d, l; ϑ, ρ; q} dank der dimensionsanalytischen Darstellung von ζ (Re) mit einem **einzigen** Kurvenzug dargestellt. Bei einer dimensionsbehafteten Darstellung und dem Vermeiden des „Sternenhimmels“ wären 25 Diagramme mit je 5 Kurvenzügen notwendig! Bei nur 5 Messungen pro Kurvenzug wären zur Darstellung 625 Messungen erforderlich! Eine im Vorfeld durchgeführte Dimensionsanalyse kann daher in der Praxis viele Versuche ersparen.

Wichtige Aspekte der Dimensionsanalyse: Anwendbarkeit

Die Anwendbarkeit der Dimensionsanalyse ist nicht unlimitiert durchführbar und ist in Abbildung 3 und nachfolgender Auflistung dargestellt.

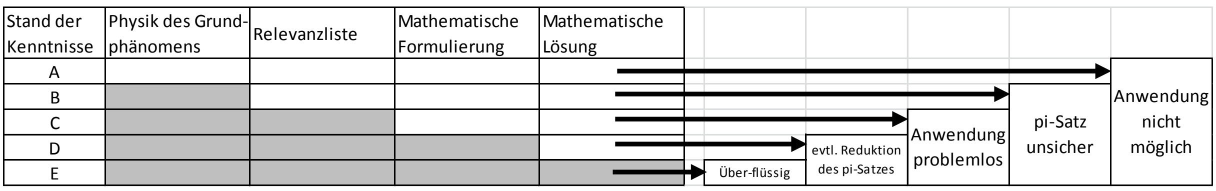

Abbildung 3: Graphische Darstellung der Anwendbarkeit der Dimensionsanalyse

- A: Physik des Grundphänomens ist unbekannt: *Dimensionsanalyse nicht möglich*
- B: Physik des Grundphänomens ist soweit bekannt, dass eine erste vorsichtige Relevanzliste aufgestellt werden kann: *pi-Satz ist unsicher*
- C: Alle relevanten physikalischen Größen, die das Problem beschreiben, sind bekannt: *Anwendung der Dimensionsanalyse ist problemlos*

- D: Problem lässt sich mathematisch formulieren: *eine tiefere Einsicht in die pi-Beziehung ist möglich die evtl. eine Reduktion des pi-Satzes zulässt*
- E: Für das Problem existiert eine mathematische Lösung: *Anwendung der Dimensionsanalyse ist überflüssig*

Wichtige Aspekte der Dimensionsanalyse: Modellübertragung

An dieser Stelle sollen einige häufig gestellte Fragen in Bezug auf die Dimensionsanalyse beantwortet werden.

Ersetzt die Dimensionsanalyse die Versuche?
Nein, sie erarbeitet die relevanten Parameter und erspart viel praktische Arbeit.

Wie klein darf das Modell sein?
Die Modellgröße ist abhängig vom Übertragungsmaßstab und von der bei den Versuchen erzielbaren Messgenauigkeit sowie von weiteren physikalischen Phänomenen (z.B. Kapillarität)

Ist ein einziges Modell ausreichend oder sind mehrere, verschieden große Modelle notwendig?
Ein einziges Modell ist ausreichend, sofern der Betriebszustand des Systems über die entsprechende Wahl der Prozessparameter möglich ist. (z.B. Viskosität)

Wann müssen die Modellmessungen im originalen Stoffsystem durchgeführt werden?
Wenn Modell-Stoffsysteme nicht verfügbar sind (Newtonsche Flüssigkeiten) oder wenn relevante Stoffparameter nicht bekannt sind (meist für Schäume und Schlämme)

Vorteile der Dimensionsanalyse

Zusammenfassend ergeben sich folgende Vorteile durch eine Dimensionsanalyse.

Verringerung der Zahl der Parameter, mit denen das Problem beschrieben wird. Es verkürzt sich im zuvor beschriebenen Beispiel die Anzahl der Parameter von 5 (Relevanzliste) auf 3 Π –Kennzahlen. Es findet eine **gesicherte Übertragung des gewünschten Betriebszustandes** vom Modell ins Große statt. Eine **tiefere Einsicht in das physikalische Geschehen** ist möglich, da durch die Beziehung zwischen Kennzahlen physikalische Zustände abgegrenzt werden (Bsp. Strömungszustände). Es ergibt sich eine **größere Beweglichkeit in der Wahl der Parameter** welche im Model verändert werden und eine gesicherte Extrapolierbarkeit innerhalb des erfassten Bereiches. Im gebrachten Beispiel kann so in der Kennzahl Π_2 (Re-Zahl) die Viskosität, oder die Geschwindigkeit oder die Längenabmessung geändert werden um die physikalischen Auswirkungen zu beobachten.

Quellen:

Zlokarnik, M., Seminar „Scale-up“, Montanuniversität Leoben, November 2011

Zlokarnik, M. (2005): Scale up – Modellübertragung in der Verfahrenstechnik; WILEY-VCH; ISBN 978-3-527-31422-5

Eck, B. (1961): Technische Strömungslehre; Springer-Verlag Berlin-Göttingen

Stanton, T.E., **Pannell**, J.R. (1914): Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids; Phil. Trans. Roy. Soc. London