Der Satz von Bayes

Vortrag im Rahmen eines Treffens der Grazer Pro Scientia Geförderten

Sofie Waltl

Graz, 3. Dezember 2014

Der englische Geistliche und Amateurmathematiker Thomas Bayes formulierte den *Satz von Bayes* erstmals in den 1740er Jahren. Bayes versuchte *inverse Wahrscheinlichkeiten* zu beschreiben, um damit also den Schluss von Wirkung auf Ursache ziehen zu können. Bayes machte sich an die Arbeit, um Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten zukünftiger Ereignisse zu formulieren. Dazu hatte er die Idee, von einer ersten Einschätzung auszugehen und diese anzupassen, sobald neue Informationen bereitstehen. Mathematisch formulieren konnte Bayes dieses Problem noch nicht, dies tat erst ein anderer: Pierre-Simon Laplace. Der französische Mathematiker Laplace hatte 1812 dieselbe Idee wie Thomas Bayes. Der Satz von Bayes kann in seiner einfachsten Form (siehe z.B. Koch, 2000, für eine mathematisch fundierte Einführung) folgendermaßen formuliert werden:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)},$$

dabei bezeichnen A und B zwei Ereignisse, $\mathbb{P}(A)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A und $\mathbb{P}(A|B)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gesetzt den Fall, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist. Der Satz von Bayes liefert damit eine Berechnungsmöglichkeit für bedingte Wahrscheinlichkeiten, die auf möglicherweise bekannten oder zumindest einfacher berechenbaren Wahrscheinlichkeiten beruht. Der Satz in dieser elementaren Form kann recht einfach bewiesen werden. Dazu muss zunächst die bedingte Wahrscheinlichkeit formal definiert werden. Für $\mathbb{P}(B) \neq 0$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gegeben das Ereignis B definiert als

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

dabei bezeichnet $\mathbb{P}(A \cap B)$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A und B (siehe Abbildung 1). Intuitiv bedeutet dies, dass aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit von A

und B die Unsicherheit über das Ereignis B (dieses ist ja bereits eingetroffen) herausgerechnet wird. Ein Spezialfall liegt dann vor, wenn die Ereignisse A und B unabhängig sind (also keinen Einfluss aufeinander haben). Für unabhängige Ereignisse A und B gilt nämlich, dass $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit von $A|B$ ist damit gleich der Wahrscheinlichkeit von A selbst,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Die Tatsache, dass B bereits eingetreten ist, hat also – wie erwartet – keine Auswirkung auf das Ereignis A.

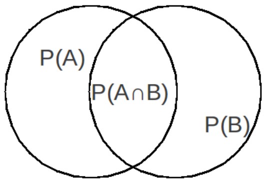

Abbildung 1: Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge $A \cap B$.

Mit dieser Definition lässt sich der Satz von Bayes nun durch einfache Umformungen beweisen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) \cdot 1}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)}}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.
\end{aligned}$$

Um den Mechanismus der Bayes-Formel voll zu erfassen, betrachten wir nun ein Beispiel, in dem es um Wetten bei Pferderennen geht (siehe Boone, 2013). Dabei treten zwei Pferde gegeneinander an: Aragon und Butterfly. Das Rennen besteht aus einer einzigen Runde. Jenes Pferd, das die Ziellinie als erstes überschreitet, hat gewonnen. Die Zuseher können nun

Wetten auf den Ausgang des Rennens abschließen. Dazu steht ihnen die folgende allgemein zugängliche Information zur Verfügung: Bisher gab es bereits zwölf Rennen. Davon hat Aragon fünf Mal und Butterfly sieben Mal gewonnen. Wir definieren nun *„Aragon gewinnt.“* als Ereignis A und *„Butterfly gewinnt.“* als Ereignis B. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten auf Grund dieser Information sind nun approximativ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\approx \frac{5}{12} \approx 41,7\% \quad \text{und} \\ \mathbb{P}(B) &\approx \frac{7}{12} \approx 58,3\%.\end{aligned}$$

Es scheint also sinnvoller zu sein, auf Butterfly zu setzten. Angenommen jemand bekommt noch eine Zusatzinformation: Bei den fünf Siegen, die Aragon errungen hat, hat es bei drei davon zuvor geregnet. Die Rennbahn war also drei Mal nass. Bei Butterflys Siegen hat es hingegen nur ein von sieben Mal geregnet. Darüber hinaus regnet es heute – am aktuellen Wettkampftag – auch. Wie wirkt sich diese neue Information nun aus? Die Bayes-Formel gibt eine Antwort darauf. Wir definieren dazu das zusätzliche Ereignis C *„Die Rennbahn ist nass.“* und fassen sämtliche Information in einer Tabelle zusammen:

	Regen	kein Regen	
Aragon gewinnt	3	2	$\Sigma = 5$
Aragon verliert	1	6	$\Sigma = 7$
	$\Sigma = 4$	$\Sigma = 8$	

Aus dieser Tabelle lassen sich nun alle Wahrscheinlichkeiten, die in der Bayes-Formel vorkommen, ablesen und wir erhalten

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(C|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C)} \approx \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

Es scheint nun also sinnvoller zu sein, auf Aragon zu setzen! Dieses Beispiel illustriert somit, dass zusätzliche – auch vollkommen anders geartete – Informationen mit Hilfe der Bayes-Formel in Entscheidungsprozesse miteinbezogen werden und das Resultat mitunter grundlegend verändern können.

McGrayne (2011) fasst in ihrem populärwissenschaftlichen Buch *„Die Theorie, die nicht sterben wollte.“* die Meilensteine in der Geschichte der Bayes-Formel zusammen. Eine kleine Auswahl herausragender Beispiele, in denen die Bayes-Formel eine wichtige Rolle gespielt hat, ist die folgende: Im zweiten Weltkrieg gelang einem Team rund um Alan Turing die Entzifferung der mit der Enigma verschlüsselten deutschen Funksprüche. Winston

Churchill (siehe z.B. Spencer, 2009) meinte, dass Turning damit den wichtigsten einzelnen Beitrag zum Sieg der Alliierten im Krieg gegen Nazi-Deutschland beisteuerte (*"... the single biggest contribution to Allied victory in the war against Nazi Germany"*). Weiters wurden im zweiten Weltkrieg mit Hilfe der Bayes-Formel deutsche und im kalten Krieg russische U-Boote aufgespürt. Doch auch in anderen Bereichen gelangen mit Hilfe von Bayes-Methoden wichtige Erkenntnisse: 1951 konnte erstmals ein Zusammenhang zwischen Rauchen und Lungenkrebs hergestellt werden (Cornfield, 1951). Als 1960 John F. Kennedy bei den US-Präsidentschaftswahlen gegen Richard Nixon antrat, half die Bayes-Formel das knappe Wahlergebnis sehr genau vorherzusagen. Bei den Wahlen 2011 gelangen sogar richtige Prognosen in 49 von 51 Bundesstaaten. Als 2009 der Air-France-Flug 447 von Rio de Janeiro nach Paris abstürzte, konnte das Wrack ebenfalls durch das Anwenden von Bayes-Methoden gefunden werden. Beachtet man das Suchfeld, das in etwa so groß war wie die gesamte Schweiz, ist diese Leistung beeindruckend. Ein ganz anderer Anwendungsbereich sind Spam-Filter. Bayes-Methoden erlauben es, dass Spam-Filter ständig *dazulernen* und somit personalisiert werden können.

Diese Beispiele zeigen die breiten und vielfältigen Einsatzmöglichkeiten dieses alten Konzepts der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zunehmende Computerleistung hat es möglich gemacht, komplexe Fragestellungen anhand großer Datenmengen zu analysieren und Antworten zu finden. Heute ist die Bayes-Formel aus Wissenschaft, Technik und Gesellschaft nicht mehr wegzudenken.

Literatur

Boone, K. (2013). Bayesian statistics for dummies. `http://www.kevinboone.net/bayes.html`.

Cornfield, J. (1951). A method of estimating comparative rates from clinical data; applications to cancer of the lung, breast, and cervix. *Journal of the National Cancer Institute*, 11(6):1269–1275.

Koch, K.-R. (2000). *Einführung in die Bayes-Statistik.* Springer Berlin Heidelberg.

McGrayne, S. B. (2011). *The Theory That Would Not Die: How Bayes' Rule Cracked the Enigma Code, Hunted Down Russian Submarines, and Emerged Triumphant From Two Centuries of Controversy.* Yale University Press.

Spencer, C. (2009). Profile: Alan Turing. `http://news.bbc.co.uk/2/hi/uk_news/8250592.stm`.