

Kurt Gödel und die Grenzen der Beweisbarkeit

Eine mathematisch-philosophische Betrachtung

Die Mathematik des frühen 20. Jahrhunderts war geprägt von dem Bestreben, eine vollständige und widerspruchsfreie Grundlage für alle mathematischen Theorien zu schaffen. David Hilbert, einer der einflussreichsten Mathematiker seiner Zeit, formulierte dies in seinem berühmten Zitat:

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“

Dieser Optimismus wurde jedoch durch die bahnbrechenden Arbeiten Kurt Gödels fundamental erschüttert.

Kurt Gödel wurde 1906 in Brünn, damals Teil Österreich-Ungarns, in eine großbürgerliche Familie geboren. Nach der Gründung der Tschechoslowakischen Republik zog die Familie nach Wien um, wo Gödel zunächst Theoretische Physik studierte. Durch den Besuch von Vorlesungen über Philosophie bei Heinrich Gomperz und Zahlentheorie bei Philipp Furtwängler entwickelte er sein tiefgreifendes Interesse an der Verbindung zwischen der Logik und der Zahlentheorie.

Besonders prägend für Gödels intellektuelle Entwicklung war seine Verbindung zum Wiener Kreis, einer Gruppe von Philosophen und Wissenschaftlern um Moritz Schlick, Hans Hahn, Rudolf Carnap und Karl Menger. Während der Wiener Kreis den logischen Empirismus vertrat, der metaphysische Aussagen ablehnte und sich auf empirisch überprüfbare oder analytisch wahre Aussagen beschränkte, entwickelte Gödel eine abweichende philosophische Position. Seiner Ansicht nach wirken mathematische Strukturen als eine vom menschlichen Geist unabhängige Realität, man kann dies auch unter dem Begriff des mathematischen Platonismus zusammenfassen. Diese Perspektive wurde durch seine intensive Auseinandersetzung mit den Werken von Gottfried Leibniz, Thomas von Aquin und Ludwig Wittgenstein weiter geschärft.

Der zentrale Durchbruch in Gödels Arbeit kam mit seinem ersten Unvollständigkeitssatz. Dieser besagt, dass es in jedem konsistenten formalen System Aussagen gibt, die innerhalb des Systems weder bewiesen noch widerlegt werden können. Diese fundamentale Erkenntnis kann in vereinfachter Darstellung anhand des sogenannten Lügner-Paradoxons dargelegt werden:

"Dieser Satz ist falsch."

Die mangelnde Beweisbarkeit dieses Satzes entfaltet sich durch dessen selbstreferentielle Natur: angenommen, der Satz ist wahr bzw. beweisbar, widerspricht die daraus folgende Erkenntnis – die Falschheit des Satzes – der vorangegangenen Annahme. Wenn er wiederum falsch wäre, gelangt man durch die doppelte Verneinung dazu, dass der Satz wahr sei, erneut ein Widerspruch zur anfänglichen Position. Diese scheinbar simple logische Konstruktion führt in jeder Weise zu einem Widerspruch und in weiterer Folge zu tiefgreifenden Erkenntnis über die Grenzen formaler Systeme.

Ab 1934 unternahm Gödel regelmäßige Reisen in die USA, wo er am neu gegründeten Institute for Advanced Study in Princeton tätig war. Die zunehmende politische Instabilität in Europa und seine schlechter werdende gesundheitliche Situation führten 1940 zu seiner endgültigen Emigration aus Wien. In den USA vertiefte er seine philosophischen Studien und erweiterte sein Forschungsgebiet auf verschiedene andere Bereiche neben der Logik und Mathematik.

Die bemerkenswerte Vielfalt von Gödels wissenschaftlichen Interessen zeigt sich in seinen späteren Arbeiten. Er beschäftigte sich unter anderem mit der Axiomatisierung des ontologischen Gottesbeweises von Anselm von Canterbury und leistete wichtige Beiträge zur theoretischen Informatik. Bereits 1956 erwähnte er in einem Brief an John von Neumann Überlegungen, die später zur Formulierung des P-NP-Problems führten - eines der bedeutendsten ungelösten Probleme der theoretischen Informatik. Gödels Arbeiten inspirierten auch Alan Turing bei der Entwicklung des Modells der "Turingmaschine" und der Formulierung des Halteproblems. Dieses fundamentale Problem der Informatik fragt, ob ein Computerprogramm mit einer bestimmten Eingabe jemals zu einem Ende kommt oder endlos weiterläuft. Turing bewies, dass es unmöglich ist, ein Programm zu schreiben, das diese Frage für beliebige andere Programme zuverlässig beantworten kann. Eine Erkenntnis, die Gödels Unvollständigkeitssatz in der Welt der informationstechnischen Berechenbarkeit widerspiegelt. In der Relativitätstheorie entdeckte Gödel das nach ihm benannte Gödel-Universum. Diese rein mathematische Lösung zu Einsteins Theorie ermöglicht theoretisch Zeitreisen und stellt damit die Existenz eines objektiven Zeitflusses in Frage.

Gödels Nachlass ist bis heute nicht vollständig aufgearbeitet, eine besondere Herausforderung stellt dabei die Verwendung der Gabelsberger Kurzschrift dar, die Gödel für seine Aufzeichnungen nutzte. Im Rahmen des "Gödel Enigma Projekt" versucht eine vom finnischen Philosophen Jan von Plato geleitete Forschungsgruppe, eine umfangreiche Mikrofилmsammlung von etwa 35 Rollen mit je etwa 1000 Bildern zu entschlüsseln. Diese Dokumente wurden von Gödels Witwe dem Princeton Institute for Advanced Studies übergeben, wo sie zunächst im Keller lagerten, bis sie in den 1980er-Jahren vom US-Mathematiker John Dawson katalogisiert wurden.

Kurt Gödels Arbeiten haben nicht nur die Grundlagen der Mathematik erschüttert, sondern auch fundamentale Fragen über die Natur der Wahrheit und die Grenzen menschlicher Erkenntnis aufgeworfen. Seine Unvollständigkeitssätze zeigen, dass selbst in der Mathematik, die oft als Inbegriff absoluter Gewissheit gilt, unüberwindbare Grenzen des Beweisbaren existieren. Diese Erkenntnis hat weitreichende Implikationen für unser Verständnis von formalen Systemen und den Grundlagen des menschlichen Denkens.

Budiansky, S. (2022). *Reise zu den Grenzen der Vernunft: Kurt Gödel und die schwerste Krise der Mathematik*. Propyläen Verlag.

University of Helsinki. (o. D.). Gödel Enigma. Verfügbar unter <https://www.helsinki.fi/en/researchgroups/godel-enigma>