Vortragszusammenfassung **Graz, 08.01.2026**

Lorenz Schernthanner

Intuition vs. Logik – Rätsel und Paradoxa

Eine Geschichte von 100 Gefangenen

Warum Rätsel und Paradoxa?

Rätsel und Paradoxa sind weit mehr als bloße Gedankenspiele. Zwar machen sie oft auch Spaß und laden zum Nachdenken oder Philosophieren ein, ihr eigentlicher Wert liegt jedoch darin, dass sie grundlegende Denkfehler sichtbar machen. Viele bekannte Paradoxa zeigen eindrucksvoll, dass unsere erste Intuition häufig falsch ist, selbst dann, wenn sie sich absolut plausibel anfühlt.

Insbesondere in der Wissenschaft und hier vor allem in der Statistik kommt dieser Erkenntnis eine zentrale Bedeutung zu. Fehlinterpretationen entstehen meist nicht durch mangelnde Daten, sondern durch falsche Schlussfolgerungen. Ein klassisches Beispiel hierfür ist das Simpson-Paradoxon: Ein statistischer Trend, der in mehreren getrennt betrachteten Gruppen eindeutig erscheint, kann sich umkehren oder sogar ins Gegenteil verkehren, sobald diese Gruppen zusammengefasst werden. Dadurch kann eine scheinbar klare Beziehung zwischen zwei Variablen irreführend sein, wenn wichtige Einflussfaktoren nicht berücksichtigt werden. Solche Effekte sind also nicht nur theoretisch relevant, sondern haben direkte Auswirkungen auf Forschung, Entscheidungsfindung und Spieltheorie.

Ein besonders eindrucksvolles Beispiel für den Konflikt zwischen Intuition und Logik ist das 100-Prisoners-Paradoxon.

Das Ausgangsszenario

Es gibt 100 Gefangene, nummeriert von 1 bis 100, sowie 100 durchnummerierte Boxen, die sich in einem Raum befinden. In jeder Box liegt ein Zettel, ebenfalls nummeriert von 1 bis 100. Die Zettel werden zufällig auf die Boxen verteilt.

Die Gefangenen betreten den Raum nacheinander. Jeder darf maximal 50 Boxen öffnen. Findet er den Zettel mit seiner eigenen Nummer, gilt der Versuch als erfolgreich. Das Schicksal aller ist jedoch miteinander verbunden: Nur wenn alle 100 Gefangenen ihre Nummer finden, werden sie freigelassen. Scheitert nur ein einziger von ihnen, werden alle hingerichtet.

Vor dem Beginn dürfen sich die Gefangenen auf eine gemeinsame Strategie einigen, sobald aber der Erste den Raum betritt, ist jede Kommunikation verboten.

Die zentralen Fragen lauten nun:

Wie hoch ist die Überlebenswahrscheinlichkeit der Gefangenen und was ist die beste Strategie?

Wenn Intuition in die Irre führt

Ein naheliegender Ansatz ist, dass jeder Gefangene zufällig 50 Boxen öffnet. Individuell betrachtet hat damit jeder eine 50%-ige Wahrscheinlichkeit, seine Nummer zu finden. Für alle 100 Gefangenen gemeinsam ergibt sich dadurch jedoch nur eine Überlebenswahrscheinlichkeit von:

Zum Vergleich: Zwei Personen hätten eine höhere Wahrscheinlichkeit, zufällig dasselbe Sandkorn auf allen Stränden und Wüsten der Erde aufzuheben. Diese Strategie scheitert, weil sie die Ereignisse als unabhängig voneinander behandelt, obwohl sie in diesem Szenario tatsächlich voneinander abhängen und genau dadurch das Vorgehen zum Scheitern führt.

Wenn Struktur Zufall schlägt: Die Zyklus-Idee

Mit der richtigen Strategie lässt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit der Gefangenen jedoch überraschenderweise auf etwa 31 % erhöhen. Diese sogenannte Zyklus- oder Loop-Strategie funktioniert wie folgt:

Beim Betreten des Raumes öffnet ein Gefangener zunächst die Box mit seiner eigenen Nummer. Die Zahl auf dem darin liegenden Zettel bestimmt die nächste Box, die er öffnet. Dieses Vorgehen setzt er fort, bis er entweder die Box mit seiner eigenen Nummer darin findet oder bis er 50 Boxen geöffnet hat. Öffnet eine Person zuerst Box 17 und findet dort den Zettel mit der Nummer 42, öffnet sie als nächstes Box 42 und so weiter.

Damit folgt jeder Gefangene einer festen Struktur, und genau diese Struktur ist entscheidend.

Warum funktioniert diese Strategie?

Die zufällige Verteilung der Zahlen in den Boxen entspricht mathematisch einer Permutation der Zahlen von 1 bis 100, also einer Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge. Jede Permutation lässt sich eindeutig in geschlossene Zyklen zerlegen. Ein Zyklus entsteht, wenn eine Folge von Boxen letztlich wieder zur Ausgangsbox zurückführt.

Die Zykluslängen können sehr unterschiedlich sein: von 1 (eine Box enthält ihre eigene Nummer) bis hin zu 100 (jede Box führt zu einer weiteren, bis die letzte Box, die übrig bleibt, wieder zur ersten zurückführt). Aber jede zufällige Anordnung der Nummern in den Boxen führt mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit zu einer Mischung dieser Zyklen mit unterschiedlicher Länge.

Beginnt ein Gefangener bei der Box mit seiner eigenen Nummer, ist garantiert, dass er sich auf genau dem Zyklus befindet, der seine Nummer enthält.

Ob er erfolgreich ist, hängt damit ausschließlich von der Länge dieses Zyklus ab:

- Ist der Zyklus höchstens 50 Boxen lang, findet er seine Nummer mit Sicherheit.
- Ist der Zyklus länger als 50 Boxen, scheitert er.

Entscheidend ist dabei: Alle Gefangenen mit Nummern auf demselben Zyklus teilen dasselbe Schicksal. Entweder finden alle ihre Nummer oder keiner von ihnen.

Die entscheidende Wahrscheinlichkeit

Mit dieser Methode entspricht die Gesamtüberlebenswahrscheinlichkeit daher der Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Permutation der Zahlen keinen Zyklus enthält, der länger als 50 ist. Mathematisch lässt sich zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Zyklus der Länge k näherungsweise $1/k$ beträgt:

$$P(L{=}k){=}\frac{Anzahl\ einzigartigerloops}{GesamtzahlderPermutationen}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zyklus größer als 50 existiert, ist somit:

$$P(L>50)=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100}\approx 0{,}69.$$

Daraus ergibt sich eine Erfolgswahrscheinlichkeit von etwa 31 %.

Bemerkenswert ist, dass jeder einzelne Gefangene weiterhin nur eine individuelle Erfolgswahrscheinlichkeit von 50 % hat. Der Clue an dieser Zyklus-Strategie ist, dass die Gewinnwahrscheinlichkeiten miteinander verknüpft werden.

Gemeinsames Gewinnen oder gemeinsames Scheitern

Während bei der Zufallsstrategie im Mittel etwa 50 Gefangene erfolgreich wären, führt die Zyklus-Strategie zu einem extremen Ausgang: In rund 31 % der Fälle überleben alle, in den übrigen Fällen scheitern mindestens 51. Der Schlüssel liegt darin, die Wahrscheinlichkeiten zu verbinden: Entweder gewinnen alle kollektiv oder verlieren gemeinsam sehr eindeutig.

Das 100-Prisoners-Paradoxon zeigt eindrucksvoll, wie stark Intuition täuschen kann und wie mächtig strukturiertes, logisches Denken ist. Gerade in Statistik, Spieltheorie und wissenschaftlicher Datenanalyse ist das Verständnis solcher Abhängigkeiten essenziell.

Quellenverzeichnis:

- Gál, A., & Miltersen, P. B. (2003). *The Cell Probe Complexity of Succinct Data Structures*. BRICS, Department of Computer Science, University of Aarhus.
- Winkler, P. (2006). *Seven Puzzles You Think You Must Not Have Heard Correctly*.
- Golomb, S., & Gaal, P. (1998). *On the Number of Permutations on n Objects with Greatest Cycle Length k*. Advances in Applied Mathematics, 20(1), 98–107.
- Lamb, E. (2012). *Puzzling Prisoners Presented to Promote North America's Only Museum of Math*. Scientific American.

- Wikipedia: *The 100 Prisoners Problem*