Spieltheorie

Vortrag im Rahmen eines Treffens der Grazer Pro Scientia Geförderten

Sofie Waltl

Graz, 9. April 2014

1 Was ist Spieltheorie?

Die Spieltheorie analysiert strategische Entscheidungssituationen, in denen *mehrere Spieler* miteinander interagieren. Das Ergebnis eines Spiels hängt von den Entscheidungen *aller Spieler* ab.
Die Anwendungen der Spieltheorie sind mannigfaltig. Dazu zählen beispielsweise

- Operations Research (z.B. Lieferketten)
- Wirtschaftswissenschaften (z.B. Verhandlungen, Auktionen)
- Politikwissenschaften (z.B. Social Choice - Gruppenentscheidungen wie etwa Wahlen, etc.)
- Biologie (z.B. Evolutionäre Spieltheorie - Entwicklung von Populationen, Ausbreitung von Infektionen, etc.)
- Computerwissenschaften, Künstliche Intelligenz, Logik, Philosophie,...

Die ersten spieltheoretischen Überlegungen werden auf Anfang/Mitte des 19. Jahrhunderts datiert. Namhafte Mathematiker und auch Wirtschaftswissenschaftler wie Bernoulli, Bertrand, Cournot, Edgeworth, von Stackelberg und von Zeuthen analysierten auf formale Art und Weise das Verhalten des *Homo Oeconomicus*. In dieser Frühzeit entwickelte sich noch keine allgemeine Theorie, vielmehr wurden einzelne Probleme nebeneinander bearbeitet. 1928 führt John von Neumann erstmals eine formale Theorie ein, um Gesellschaftsspiele zu untersuchen (daher stammt auch der Name *Spieltheorie*). 1944 veröffentlichen John von Neumann und Oskar Morgenstern das Buch *Theory of Games and Economic Behavior* und führen damit die Spieltheorie in den Wirtschaftswissenschaften ein. 1950 stellt einen Meilenstein der Spieltheorie dar: Der Mathematiker John F. Nash entwickelt eine fundamentale Lösungsstrategie für spieltheoretische Probleme.
Die Spieltheorie hat heute insbesondere in den Wirtschaftswissenschaften eine herausragende Stellung. So wurde etwa bereits acht Mal der Wirtschaftsnobelpreis an Spieltheoretiker verliehen.

2 Spieltypen

Spiele im spieltheoretischen Sinn werden grundsätzlich bzgl. der Zeit, des Informationsstandes sowie der Historie in unterschiedliche Typen eingeteilt.

Zeitliche Komponente

- *Statische Spiele:* Spieler wählen ihre Aktionen gleichzeitig.
- *Dynamische Spiele:* Das Spiel besteht aus mehreren, in einer bestimmten Reihenfolge stattfindenden Schritten. (Beispielsweise wählen die Spieler ihre Aktionen hintereinander.)

Informationsstand

- *Vollständige Information:* Allen Spielern sind die Spielregeln (Entscheidungsoptionen der einzelnen Spieler, Auszahlungen, die sich aus den einzelnen Entscheidungskombinationen ergeben) vollständig bekannt.
- *Unvollständige Information:* Nicht allen Spielern sind die Spielregeln vollständig bekannt.

Historische Information - nur bei dynamischen Spielen relevant

- *Perfekte Information:* Alle Spieler kennen den gesamten historischen Verlauf des Spieles.
- *Imperfekte Information:* Historische Spielzüge sind zumindest für manche Spieler unbekannt.

Die einfachsten Spiele sind statische Spiele mit vollständiger Information. Das berühmteste Beispiel dafür ist wohl das *Gefangenendilemma*. Dabei werden zwei Personen, die verdächtigt werden, gemeinsam ein Verbrechen verübt zu haben, getrennt voneinander verhört. Beide müssen sich entscheiden, ob sie entweder schweigen oder gestehen. Es ist ihnen jedoch nicht möglich, ihr Handeln vorab zu besprechen. Die Höchststrafe für dieses Vergehen ist mit neun Jahren bemessen. Gestehen wird als strafmildernd gewertet, weswegen sich die Strafe in diesem Fall auf sechs Jahre reduziert. Weiters ist eine Kronzeugenregelung vorgesehen: Gesteht einer der beiden, während der andere schweigt, wird der Geständige mit der Freiheit belohnt wohingegen der Nicht-Geständige die Höchststrafe erhält. Schweigen beide, werden beide wegen kleinerer Vergehen zu jeweils einem Jahr Freiheitsstrafe verurteilt. Abbildung 1 stellt das Spiel schematisch dar. In der Bi-Matrix sind jeweils die zu erwartenden Strafen, die sich aus der Kombination der Handlungen beider Personen ergeben, dargestellt. Die Ausgänge des Spiels (in diesem Fall also die Strafandrohungen) werden allgemein *Payoffs* (bzw. Auszahlungen) genannt. Eine derartige Repräsentation eines Spiels wird als *Normalform* bezeichnet und steht der *Extensivform* gegenüber, in der die Abfolge und Payoffs des Spiels als Baumdiagramm dargestellt werden.
Kollektiv betrachtet, wäre es am besten, wenn beide Gefangenen schweigen, da sie durch diese Strategie *insgesamt* das beste Ergebnis - $-1 + (-1) = -2$ - erreichen können. Beide

	Gefangener 1			
	Schweigen		Gestehen	
Gefangener 2 Schweigen	-1	-1	-9	0
Gefangener 2 Gestehen	0	-9	-6	-6

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Gefangendilemmas

Gefangenen sind jedoch dazu geneigt, zu gestehen, da sie dadurch für sich *individuell* ein besseres Ergebnis (0 anstatt -1) erzielen können. Gestehen jedoch beide, erzielen sie damit insgesamt das *schlechtest mögliche Ergebnis* von $-6 + (-6) = -12$. Da beide den Fall einer Kronzeugenregelung umgehen möchten, werden beide zum Gestehen tendieren. In diesem Fall ist Gestehen die *beste Antwort* auf jede Aktion, die der jeweilige andere setzen kann. Die Lösung (Schweigen, Schweigen) ist damit ein sogenanntes *Nash-Gleichgewicht*!

3 Nash-Gleichgewicht

Anhand des Gefangenendilemmas wurde das Konzept eines Nash-Gleichgewichts dargestellt. Eine informale Definition eines Nash-Gleichgewichts kann wie folgt formuliert werden:

> Ein Nash-Gleichgewicht ist ein Strategiepaar, bei dem es sich für keinen Spieler auszahlt, einseitig von seiner Strategie abzuweichen. Man spricht auch von 'best responses' der einzelnen Spieler.

Für eine formale Definition, muss zunächst ein Spiel in Normalform eingeführt werden.

Definition 1 (Normalform) *Ein Spiel in Normalform wird durch die Anzahl n der Spieler, deren Strategieräume $S_1, \cdots, S_n$ sowie deren Payoff-Funktionen $u_1, \cdots, u_n$ mit $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \cdots, n$ definiert. Solch ein Spiel wird mit $G = \{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$ bezeichnet.*

Mit Hilfe dieser Definition kann nun ein Nash-Gleichgewicht als Lösung eines Spiels in Normalform definiert werden.

Definition 2 (Nash-Gleichgewicht) *In einem n-Spieler Normalform-Spiel $G = \{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$ ist die Strategie $(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ mit $s_i^* \in S_i$ für $i = 1, \cdots, n$ ein Nash-Gleichgewicht, genau dann wenn für jeden Spieler i die Strategie s_i^* die beste Antwort auf die $n-1$ Strategien $(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$ ist, das heißt, dass für jeden Spieler i und all seine möglichen Strategien $s_i \in S_i$ stets*

$$u_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$$

gelten muss.

Dieses Lösungskonzept wurde 1950 von John F. Nash (siehe Abbildung 2) entwickelt. 1994 erhielt John F. Nash den Wirtschaftsnobelpreis gemeinsam mit anderen Forschern für seine Leistungen in der Spieltheorie.

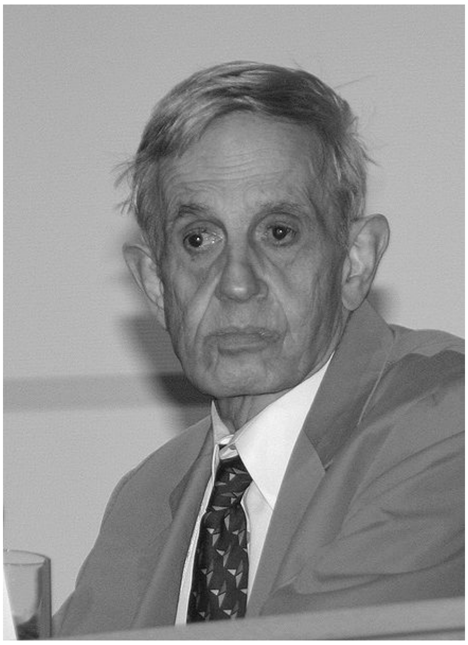

Abbildung 2: John F. Nash

4 Wie rational sind wir eigentlich?

Die Anwesenden des Treffens der Pro Scientia Geförderten in Graz wurden aufgefordert, eine reelle Zahl zwischen 0 und 100 auf ein Blatt Papier zu schreiben. Wer jene Zahl wählt, die am nächsten bei **2/3 des Durchschnitts** liegt, hat gewonnen!
Ziel ist es also eine Zahl nahe zu

$$\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

zu wählen, wobei n die Anzahl der Spieler und x_i die gewählte Zahl des i-ten Spielers für $i = 1, \cdots, n$ ist. Somit hängt die Entscheidung jedes einzelnen auch von den Entscheidungen aller anderen Spieler ab.
Die höchstmögliche Zahl, die ein Spieler wählen kann, ist 100. Wählen alle 100, resultiert daraus der extremste Mittelwert, der möglich ist, nämlich 100. Nimmt man davon $^2/_3$, erhält man $66,67$. Als Ergebnis kann also keine größere Zahl als $66,67$ auftreten. Der Bereich zwischen $66,67$ und 100 ist somit nicht mehr relevant. Das Spiel kann sozusagen erneut gestartet werden, wobei allerdings nur noch Zahlen zwischen 0 und $66,67$ zugelassen sind. Mit derselben Argumentation wie zuvor ist nun das höchstmögliche Ergebnis $44,44$. Diese Überlegungen setzt man fort, bis schließlich einzig die 0 als wählbare Zahl übrig bleibt. Die Zahl 0 ist auch das einzige Nash-Gleichgewicht dieses Spiels! Diese Zahl müssten alle wählen, wenn man von *vollständiger Rationalität* aller Spieler ausgeht. Das bedeutet: Alle handeln rational. Alle wissen, dass alle rational handeln. Alle wissen, dass alle wissen, dass alle rational handeln. Usw. In der Realität führen die meisten Menschen jedoch nur einige wenige Rationalitätsschritte durch. Dies zeigt auch eine Grenze der Spieltheorie in der praktischen Anwendung auf. Bei einem groß angelegten Experiment, das eine dänische Zeitung

durchgeführt hat, wurden insgesamt 19.196 Personen befragt. Der Gewinner konnte 5.000 dänische Kronen ($\approx$ 670 Euro) gewinnen. $^2/_3$ des Durchschnitts waren in diesem Fall

$$21,6!$$

Die Pro Scientia Gruppe in Graz handelte noch etwas rationaler: In unserem Experiment resultierte nämlich immerhin

$$13,95!$$

Zwei Personen bezeugten mit ihren Tipps 0 bzw. 1 ihre unbestechliche Rationalität.

Der Vortrag basiert überwiegend auf dem Buch *Game Theory for Applied Economists* von R. Gibbons (1992), Princeton (NJ): Princeton University Press.