Über die Färbung von Dreiecken

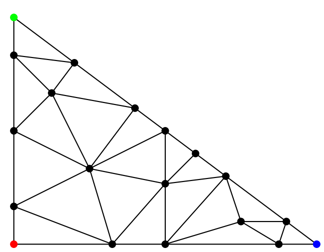
Martin P. Schwarz

5.6.2014

1 Das Lemma von Sperner

In diesem Artikel wollen wir die mathematischen Methoden zur Beweisführung anhand eines Beispiels demonstrieren:

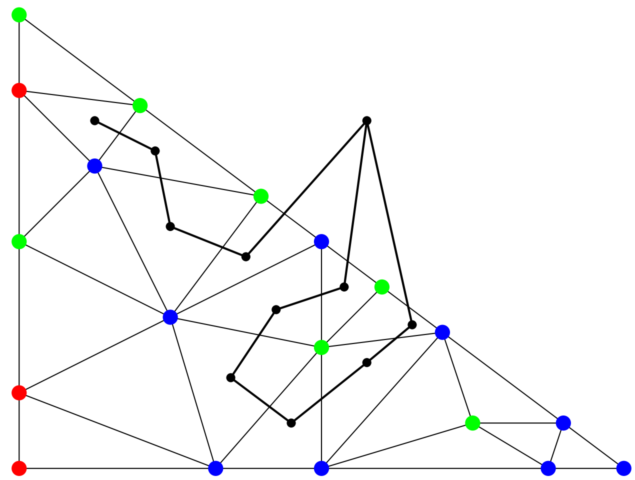
Wir betrachten ein Dreieck, an dem die Ecken die drei Farben Rot, Blau und Grün. Wir zerteilen das Dreieck in beliebig viele kleine Dreiecke in beliebiger Position. Siehe ein Beispiel:



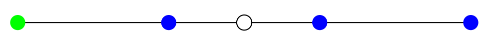
Wir können die schwarzen Knoten im Inneren des Dreieckes beliebig färben und die Knoten an den Kanten des Dreiecks dürfen nur die Farben der angrenzenden Eckpunkten haben (z.B. kann man die Knoten am unteren Ende des großen Dreiecks nur rot oder blau färben.) Das Lemma von Sperner kommt nun zu folgender verblüffender Aussage:

Lemma 1.1 (Sperner). *Unter oben genannten Annahmen gibt es im Inneren immer ein kleines Dreieck, dass alle drei Farben hat.*

Beweis. Wir wollen für diesen Beweis die kleinen Dreiecke *Länder* nennen.
Wir verbinden 2 Länder mit einem Strich genau dann, wenn sie sich eine blaugrüne Kante teilen. Außerdem verbinden wir ein Land mit dem *äußeren Land*, wenn das Land eine grün-blaue Kante nach außen hat. Wir betrachten das Beispiel:

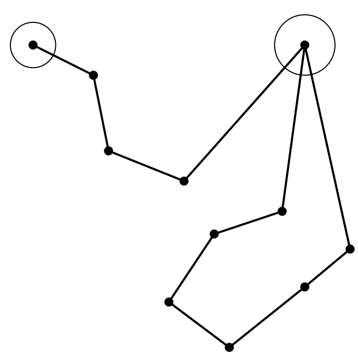


Um fortzufahren müssen brauchen wir folgende Definition: Der *Grad* eines Knoten ist die Anzahl an Kanten, die zu diesem Knoten führen. Wir wollen zunächst beweisen, dass der Grad des äußeren Landes ungerade ist: Da die kleinen Kanten der linken und der unteren großen Kante des Dreiecks nicht die Farbe grün-blau haben kann (Konstruktionsvorschrift) ist der Grad des äußeren Landes alleine von der großen schrägen Kante des Dreiecks abhängig. Auf dieser kann es jedoch nur eine ungerade Anzahl von blau-grünen Kanten geben, da es entweder nur eine blau-grüne Kante gibt, oder jeweils 2 blau-grüne Kanten hinzukommen. Man betrachte hierbei die folgende Skizze:



Der weiße Kreis kann entweder die Farbe Grün, oder die Farbe Blau bekommen. Wird er blau gefärbt, so bleibt die Anzahl der blau-grünen Kanten eins. Wird der Kreis grün gefärbt, so kommen 2 blau-grüne Kanten dazu.

Wir betrachten nun nur mehr den "Verbindungsgraphen":



Der Grad des äußeren Landes ist ungerade. Da wir aber wissen, dass die Summe der Grade gerade ist (diese ist nämlich zwei mal die Anzahl der Kanten. Wir

überlassen diesen Beweis dem interessierten Leser bzw. der interessierten Leserin), muss es also noch ein zweites Land mit ungeraden Grad geben.
Nun wollen wir uns der Frage stellen, welchen Grad die inneren Länder haben können. Natürlich können sie den Grad null haben, das hieße, sie besitzen keine blau-grüne Kante. Wenn ein Land genau eine blau-grüne Kante besitzt, dann muss das dritte Eck gerade die Farbe Rot haben. Somit haben wir ein dreifarbiges Dreieck gefunden und dieses Land hat Grad eins. Hat das Land zwei blau-grüne Kanten, so hat es Grad zwei. Mehr ist nicht möglich!
Nun können wir alles zusammenfügen und die Aussage ist gezeigt: Das äußere Land hat ungeraden Grad. Da der Graph immer geraden Grad haben muss, muss es ein inneres Land mit ungeraden Grad geben. Der einzig mögliche ungerade Grad ist Grad eins. Grad eins bedeutet aber gerade, dass es genau eine blau-grüne Kante gibt. Dies bedeutet wiederum, dass wir damit das gesuchte dreifarbige Land gefunden haben.

Q.E.D. $\square$

Literatur

[1] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Diskrete Mathematik*. Springerverlag Berlin, 2000.