

Wahrer Zufall im Kontext der Quantenmechanik über Berechenbarkeit und Vorhersagbarkeit

Gerhard Dorn, TU Graz

Da das heurige Thema des PROScientia Förderjahres dem “Zufall” gewidmet ist, möchte ich den Zufall aus quantenmechanischer Sicht erörtern. Ausgangspunkt sei die Definition des Begriffs “Zufall” auf der deutschsprachigen Wikipedia Seite: Es werden dabei vier Kategorien des Zufall unterschieden:

- a) Ein Ereignis geschieht objektiv ohne Ursache
- b) Ein Ereignis geschieht, bei dem man zwar die Einflussfaktoren kennt, sie aber nicht messen oder steuern kann, so dass das Ergebnis nicht vorhersehbar ist („empirisch-pragmatischer Zufall“)
- c) Zwei Ereignisse stehen in keinem (bekanntem) kausalem Zusammenhang
- d) Ein Ereignis geschieht, ohne dass eine Ursache erkennbar wäre

Dabei möchte ich nur auf die ersten beiden Punkte eingehen, beinhalten sie doch die wesentliche Fragen, ob jedes Ereignis einer Ursache geschuldet ist oder nicht.

Das physikalische Grundprinzip, dass sich dieser Frage nähert wurde von Newton als drittes newtonsche Gesetz formuliert

Action est Reactio

Demzufolge sind für die Vorhersagbarkeit zwei Dinge notwendig:

1. Die Kenntnis aller Systemparameter¹ zu einem Anfangszeitpunkt
(**Messbarkeit**)
2. Die rechnerischen Fähigkeiten, das System in der Zeit fort zu entwickeln ²
(**Berechenbarkeit**)

¹Für einfache Teilchen relevante Systemparameter sind Ort und Geschwindigkeit, aber auch Ladung.

²Das bedeutet alle Geschwindigkeiten und Positionen der vorkommenden Teilchen mit Hilfe der Kraftgesetze für zukünftige Zeiten vorherzusagen.

Ich möchte dazu ein kleines Rechenbeispiel präsentieren, das beide Aspekte schneidet, nämlich das Problem ein einzelnes Eisenatom zu charakterisieren. Den geeigneten Formalismus im Zuge der Quantenmechanik bieten die zwei sogenannten Schrödingergleichungen, die um 1926 von Erwin Schrödinger aufgestellt wurden und dazu imstande sind, ein einzelnes Atom und damit verbunden sowohl jegliche Materialien wie Metalle, als auch chemische Prozesse und vermutlich auch das Leben an sich zu beschreiben. Diese Gleichungen lauten:

$$H\psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t) \quad (1)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x}, t)\right)\psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

Mithilfe der ersten Gleichung kann man das Eisenatom lösen, das heißt seinen Elektronen-Grundzustand (eine Wellenfunktion) berechnen. Das entspricht grob dem ersten Punkt der Messbarkeit, obwohl wir nicht mehr Ort und Geschwindigkeiten der einzelnen Elektronen gleichzeitig wissen, sondern lediglich Aussagen über ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeiten machen wollen (dazu später mehr). Die zweite Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung dieses gewonnenen Grundzustandes.

Anhand eines einzelnen Eisenatoms soll die Komplexität dieser ersten Gleichung verdeutlicht werden: Ein Eisenatom besitzt 26 Elektronen und jeweils 3 Freiheitsgrade (wir interessieren uns für seine Ortsaufenthaltswahrscheinlichkeit in jeweils 3 Raumdimensionen). Für eine mögliche Wellenfunktion muss man alle Freiheitsgrade aller Elektronen kombinieren. Würde man eine sehr grobe Näherung durchführen und jedem Freiheitsgrad in 10 mögliche Bereiche einteilen³, dann würde man insgesamt $10^{3 \cdot 26} = 10^{78}$ mögliche Zustände für die Elektronenaufenthaltswahrscheinlichkeit haben. Anders ausgedrückt, die gesuchte Wellenfunktion wäre eine Funktion, die über 10^{78} Zuständen definiert wäre, man müsste also für jeden Zustand den Funktionswert abspeichern. Um sich diese gigantische Zahl an benötigtem Speicher zu veranschaulichen sei hier ein Vergleich gezogen: Das derzeit bekannte Weltall besteht aus etwa 10^{84} bis 10^{89} Atomen, ein Erfassen der Lösung eines Eisenatoms in grober Näherung scheint unmöglich.

Es ist daher nicht verwunderlich, dass sich die Physik schon seit gut 90 Jahren mit dieser komplexen Gleichung (1) beschäftigt, um mit besseren Näherungen mehr Erkenntnis über Festkörper zu erhalten.

Zum zweiten Punkt, der Berechenbarkeit, sei zunächst auf die klassische Mechanik und das Phänomen der chaotischen Systeme verwiesen, die einem keine Fehler bei den Anfangswerten erlauben, da sich solche Fehler nicht beherrschen lassen und kleinste Unsicherheiten ein komplett anderes Ergebnis liefern. Solche Systeme bilden die Grundvoraussetzung für den Zufall, wie er unter Punkt b) definiert ist⁴, wobei hier der Ursprung des Zufalls mehr in der Unfähigkeit begründet ist, das chaotische System zu berechnen, als darauf, die Grundgrößen zu messen.

Eine viel fundamentalere Frage ist, ob Dinge beliebig genau messbar sind (denn dann könnte man auch chaotische Systeme theoretisch berechnen). Der Weg dieser Frage führt

³zum Beispiel 10 Intervalle in der sich ein Elektron befinden kann

⁴Zum Beispiel Lotto Ziehung mit Luftturbulenzen als höchst chaotisches System

uns zu immer kleineren Längen und größeren Energieskalen und führte in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts zu dem tiefgreifenden Konzept der Quanten, die so gar nicht in unser tägliches Weltverständnis zu passen scheinen.

Die Einsicht, dass die Messung das Experiment verändert, veranlasste Heisenberg dazu in seiner Unschärferelation die fundamentale Erkenntnis zu formulieren, dass die für die klassische Mechanik notwendige, beliebig genaue Messbarkeit nicht gegeben ist: Ort (x) und Impuls (p) eines Teilchens sind nur bis zu einer fest bestimmten Unsicherheit gleichzeitig bestimmbar:

$$\Delta x \Delta p > h = 10^{-34} \text{Js} \quad (3)$$

Generell waren zur Beschreibung dieser neuen Quanten, die zugleich Teilchen- und Welleneigenschaften besitzen, neue Ideen erforderlich, da Ort und Impuls keine guten Beschreibung der Teilchen mehr erlaubten. Schrödinger führte mit seinen eingangs schon vorgestellten Wellengleichungen das Fundament ein, auf dem die Quantenmechanik heute fußt. Der Ort eines Teilchens ist nur mehr über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P , dem Betragsquadrat seiner Wellenfunktion, gegeben.

$$P(\text{Teilchen befindet sich an Ort } x) = |\Psi(x)|^2 \quad (4)$$

Da ein Teilchen also per se, nicht an sich an einem Ort ist, sondern sich dort nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit befindet, ist dem Zufall, wie wir ihn unter a) definiert haben, Tür und Tor geöffnet.

Diese fundamentale Eigenschaft, dass Quantenexperimente nicht vorhersagbar sind, wird speziell in einer neuen Technologie, der Quantenkryptographie, eingesetzt. Diese neuartige Verschlüsselungstechnik stellt eine physikalisch nicht knackbares Verschlüsselungsprinzip dar, das auf der Unteilbarkeit und Unkopierbarkeit von Quanten (wie zum Beispiel einzelnen Photonen) beruht.

Neben der hier präsentierten Variante der Quantenmechanik (Kopenhagener Deutung), gibt es allerdings noch andere Interpretationen, die von sogenannten "Verborgenen Variablen" ausgehen, die wir nicht kennen, aber dennoch den Ausgang eines jeden Quantenexperiment vorhersagen können sollen. Es wurde zumindest gezeigt, dass solche lokalen Variablen nicht in einer Lokalen Wirklichkeit existieren können, was bedeutet, dass solche Variablen als Funktionen auf dem ganzen Universum definiert sein müssten, womit sie für uns praktisch nicht zugänglich sind. Eine weitere Theorie besagt, dass jedes Quantenexperiment zu Abspaltung eines Paralleluniversums führt. Solche Theorien sind aber gemäß Sir Karl Popper nicht falsifizierbar, womit am wahren Zufall bis dato nicht gerüttelt werden kann.