Vortrag Pro Scientia Graz:
Markus Hofer, 10.01.2013:
Der Zahlen gigantischer Schatten

Mein Vortrag war inspiriert vom gleichnamigen Buch von Prof. Rudolf Taschner. Darin gibt der Autor Beispiele für die Bedeutung der Zahl in unserem täglichen Leben sowie in der Entwicklung verschiedener Wissenschaftsrichtungen. Jedes Kapitel ist dabei einer spezieller Anwendung und einer bedeutenden historischen Persönlichkeit gewidmet.

Ich habe bei meinem Vortrag den Zusammenhang von Zahl und Musik als auch Zahl und Raum hervorgehoben. Eine besondere Bedeutung bekommen Zahlen in der Musik bei der Stimmung von Instrumenten sowie bei der Definition von Tonsystemen. Hierbei ging ich zuerst auf die quintenreine oder pythagoreische Stimmung ein und erklärte dabei die aus der Musiktheorie bekannten Probleme wie das pythagoreische Komma. Überraschend dabei ist, dass diese Störungen in unserem Empfinden für Ästethik durch einfach mathematische Begriffe, wie relative prime Zahlenpaare, beschrieben werden können. In weitere Folge wird auch klar, dass die quintenreine Stimmung, als ein-dimensionales Verfahren, nicht keine ausreichend guten Resultate bringt. Die sogenannte reine Stimmung, als natürliche Erweiterung, löst zwar einige der auftretenden Probleme, aber spätestens bei Tonartwechseln kehren Unreinheiten wie das systonische Komma wieder. Als modernste Umsetzung stellte ich zum Ende des ersten Teil noch die temperierte Stimmung vor, bei der zwar, außer der Prim und der Oktave, keine Tonintervalle genau oder rein sind, allerdings sind die auftretenden Approximationsfehler so klein, dass unser Ohr diese Stimmung als am Angenehmsten empfindet. Bach's “Wohltemperiertes Klavier” ist deshalb auch im Buch das motivierende Beispiel für dieses Kapitel.

Im zweiten Teil des Vortrages beschäftigte ich mich mit der Zahl in Vermessung. Als einführendes Beispiel diente hier der rechte Winkel, welchen bereits die antiken Babylonier, Ägypter oder Inder kannten. Die Konstruktion rechter Winkel bzw. rechtwinkeliger Dreiecke hat natürlich eine große Relevanz bei der Vermessung und Zuteilung von Land, ganz besonders im Nilgebiet, wo Markierungszeichen den jährlichen Nilüberschwemmungen nicht standhalten. Was hierbei auffällt ist, dass die Ägypter rechte Winkel zwar mit Knopfschnüren legen konnten, ein Beweis, dass es sich bei den Konstruktionen tatsächlich um rechtwinkelige Dreiecke handelte, war aber nicht bekannt oder wurde zumindest nicht niedergeschrieben. Andererseits kannten z.B. die Babylonier rechtwickelige Dreiecke mit komplizierten ganzzahligen Seitenlängen, eine allgemeine Konstruktion für sogenannte pythagoreische Tripel war auch ihnen nicht bekannt. Erst Pythagoras konnte beweisen, dass die Seitenlängen a, b, c genau dann ein rechtwinkeliges Dreieck bilden wenn

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gilt. Sind a, b, c natürliche Zahlen spricht man von einem oben erwähnten pythagoreischen Tripel, wobei man sieht, dass die Suche nach Ganzzahligen der obigen Formel ein schwieriges Problem darstellt. In weiterer Folge gab ich eine Überblick über die Konstruktion von pythagoreischen Tripeln und über bekannte Diophantische Gleichungen, wie Fermat's letztem Satz. Dieses Resultat ist auf Grund seiner Geschichte besonders bemerkenswert, da es Fermat vor mehr als 400 Jahren ohne Beweis aufschrieb, der letzte Puzzleteil der tatsächlichen, vollständigen Lösung, wurde aber erst 1994 von Wiles gefunden.

Das Wissen über regelmßige Dreiecke wurde in der Antike nicht nur zur Vermessung von Land sondern auch zur Approximation des Erdradius oder des Abstandes zwischen der Objekte in unserem Sonnensystem verwendet. Ich stellte den Ansatz des Eratosthenes vor, der es in der Antike bereits mit überraschender Genauigkeit schaffte, den Erdradius mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken zu errechnen. Sein Schätzwert weicht vom heute bekannten mittleren Wert, die Erde ist ja keine Kugel, um weniger als ein Prozent ab. Als abschließendes Beispiel erklärte ich noch die sogenannte Parallaxe und wie man sie bei der Bestimmung von Entfernungen anwenden. Dabei beobachtet man einen entfernten Punkt von zwei Standpunkten aus, von denen die Entfernung bekannt ist. Misst man die beiden Winkel, welche vom entfernten Punkt und dem jeweils anderen Beobachtungspunkt eingeschlossen sind, kann man das entstandene Dreieck vollständig bestimmen. Damit erhält man auch die Abstände zwischen Beobachtungspunkten und dem dritten Punkt. Um die Entfernung zu erdnahen Objekten wie dem Mond zu meßen, reicht ein beobachten von zwei von einander weit entfernten Punkten auf der Erde aus. Bei der Messung des Erde-Sonne-Abstandes werden allerdings die Meßfehler zu groß. Unter Einbeziehung eines zusätzlichen Punktes mit bekantem Abstand, wie z.B. der Venus, ist das aber beim Eintreten von bestimmten Phänomenen, wie einem Venustransit, möglich. Auf diese Art wurde diese komplizierten Messungen bereits lange vor Konstruktion der ersten Raumschiffe relativ genau durchgeführt.