Vorweihnachtliche Rätsel und ihre mathematischen Hintergründe

Gerhard Dorn, TU Graz

Seit gut zwölf Jahren bringt das deutsche Forschungszentrum Matheon in der Adventzeit den Mathekalender[1], einen Adventkalender voller mathematischer Rätsel, heraus. Einige dieser spannenden Rätsel und ihre mathematischen Hintergründe möchte ich hier kurz behandeln.

1 Geschenkeverpacken

Ein einfaches Beispiel zum Aufwärmen:

Aufgabe: Die Wichtel Alex, Bilbo und Charlie sind schon eifrig am Geschenkeverpacken um für Weihnachten alles vorzubereiten. **Alex**, als diensältester und erfahrenster Wichtel benötigt im Schnitt **eine Minute** um ein Geschenk einzupacken. **Bilbo und Charlie** sind noch nicht so geschickt und brauchen **drei bzw. sechs Minuten** um ein Geschenk laut Nordpolnorm zu verpacken.

Am 5. Dezember bekommen sie einen Notruf vom befreundeten Nikolaus: "Einer meiner Helferlein ist so kurz vor dem Nikolausfest krank geworden, ich benötige Unterstützung um die restlichen 120 Geschenke zu verpacken!". Alex, Bilbo und Charlie helfen gerne. **Wie lange werden die drei brauchen um die 120 Geschenke zu verpacken?**

Lösung: Wesentlich bei diesem Beispiel ist es, von den Zeiten, die die Wichtel zum Geschenkeeinpacken brauchen, auf Geschwindigkeiten überzugehen. Dies geschieht durch Division: Anzahl der verpackten Geschenke durch Anzahl der dafür benötigten Minuten. Die Geschwindigkeiten lassen sich addieren. Mit der neuen Gesamtgeschwindigkeit des Triumwichtelvirats lässt sich die Zeit mit Anzahl der Geschenke dividiert durch die Gesamtgeschwindigkeit berechnen. In Formeln ausgedrückt, ergibt das

$$\frac{120 \text{ Geschenke}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{120}{\frac{3}{2}} = 80 \text{ Minuten} \tag{1}$$

Hintergrund: Der Kern dieses Beispieles besteht darin, das richtige Mittel, nämlich das harmonische Mittel zu finden, gegeben seien k Wichtel mit y_i Bearbeitungszeiten. Die Gesamtdauer für n Werkstücke beträgt demnach:

$$\overline{y} = \frac{n}{\dfrac{1}{y_1}+\cdots+\dfrac{1}{y_k}}. \tag{2}$$

[1] www.mathekalender.de

2 Streik der Geschenkeverpacker

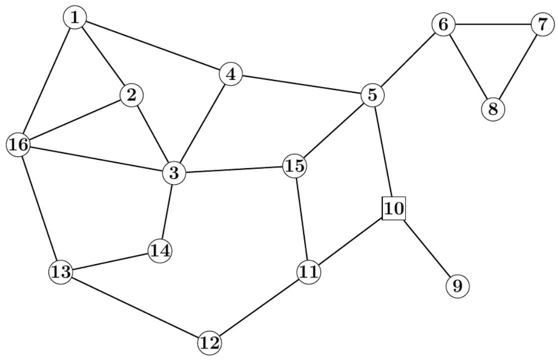
Ein zweites Beispiel beschäftigt sich mit Netzwerken und zeitabhängigen Prozessen, wie sie etwa durch ein Straßenbahnnetz oder einen Irrgarten dargestellt werden.

Aufgabe: Es ist ein eiskalter Morgen am Nordpol und das Geschenkeverpacken in der Wichteleinheit G sollte auf Hochtouren laufen. Es sollte...

Die Wichtel haben die Arbeit jedoch gänzlich niedergelegt, da ihr Vorarbeiter, Oberwichtel **Ottokar**, die Arbeit schwänzt. Ottokar hat beschlossen, den beschaulichen Morgen **im Eisheckenlabyrinth (siehe Abbildung 1)** zu verbringen, anstatt zu arbeiten. Der Weihnachtsmann ist alles andere als begeistert, als er von der Arbeitsniederlegung hört. Er muss es schaffen, Ottokar so schnell wie möglich wieder zur Arbeit zu bekommen, denn sonst drohen Geschenke unverpackt ausgeliefert zu werden.

Der Weihnachtsmann weiß genau, dass Ottokar es ihm nicht leicht machen wird, weil er sich ohne Pause im Irrgarten bewegt. Von einer Station zu einer benachbarten Station braucht er genau eine Minute. Immer wenn Ottokar an eine Station kommt, so wählt er sofort gleichverteilt unter allen abgehenden Gängen seinen nächsten Gang und läuft weiter. Dabei kann es auch passieren, dass er den gleichen Gang nimmt, aus dem er gekommen ist.

Der Weihnachtsmann schaut noch einmal auf seinen Überwachungsmonitor vom Heckenlabyrinth. Genau! Dort, auf **Station Nummer 10**, ist Ottokar gerade. Ohne zu zögern macht sich der Weihnachtsmann auf den Weg. "In meinem Alter werde ich diesem Halunken aber nicht hinterherhetzen. **Ich suche mir eine schöne Station und da warte ich dann, dass er dorthin kommt.**" denkt er sich. Der **Weihnachtsmann** benötigt **zwei Minuten**, bis er sich an eine beliebige Station des Labyrinths gebeamt hat. In diesen zwei Minuten bewegt sich Ottokar natürlich weiter im Labyrinth. **Doch wohin sollte sich der Weihnachtsmann beamen, damit er Ottokar möglichst früh antrifft?** Genauer gefragt: Es geht darum, die Station zu finden, an der die erwartete Zeit Ottokar an dieser Station zu treffen, minimiert wird, wenn Ottokar zwei Minuten Vorsprung hat und bei Station 10 startet.



Lösung: Zunächst betrachten wir das Netzwerk und stellen uns die Frage, welchen Knoten Ottokar nach langer Zeit am häufigsten besuchen wird. Dies ist ohne Zweifel jener

Knoten, mit den meisten Verbindungen, also **Knoten 3 mit fünf Verbindungen**.

Die eigentliche Frage ist jedoch komplexer, sie bezieht einen Startwert ein und sucht nach einer minimalen Wartezeit. Würden wir nicht wissen, an welcher Stelle Ottokar zu einem gewissen Zeitpunkt startet, wir würden uns an Knoten 3 stellen.

Um diese Fragestellung mathematisch zu behandeln sei hier noch ein Konzept, das des **Markovprozesses**, eingeführt. Zunächst ist es hilfreich mit **Wahrscheinlichkeiten** zu arbeiten, die ausdrücken, mit welcher Wahrscheinlichkeit Ottokar zu einem gewissen Zeitpunkt t an einem gewissen Knoten i gefunden werden kann. Da Ottokar nicht das Labyrinth verlässt, muss die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten zu jedem Zeitpunkt t 100% ergeben (Normierung).

Wir bezeichnen so einen Wahrscheinlichkeitsvektor mit π_t. Dieser Zeilenvektor besteht für jede Zeit t aus 16 Komponenten (für jeden Knoten ein Eintrag). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wissen, wir, dass Ottokar sich an Knoten 10 befindet. Also ist die Wahrscheinlichkeit Ottokar zum Zeitpunkt $t = 0$ an Knoten 10 zu finden 100%. Somit ist die 10. Vektorkomponente gleich eins (100%) und alle anderen Vektorkomponenten aufgrund der Normierung gleich null.

Mit der Zeit wird diese Wahrscheinlichkeit zerfließen und sich auf die Knoten – nach sehr langer Zeit entsprechend der Anzahl ihrer Verbindungen – verteilen. Diese finale Verteilung (nach der Thermalisierungsphase) nennen wir Gleichgewichtsverteilung, bei der die Wahrscheinlichkeit, Ottokar an Knoten 9 zu finden, am geringsten und an Knoten 3 zu finden, am größten ist.

Zeitentwicklung: Um der gesuchten Antwort näher zu kommen, wollen wir überlegen wie sich so ein Wahrscheinlichkeitsvektor mit der Zeit verändert. Dazu überlegen wir uns mit welcher Wahrscheinlichkeit sich Ottokar im nächsten Zeitschritt zu Knoten j läuft, wenn er sich gerade an Knoten i befindet. Diese Wahrscheinlichkeit ist ungleich null, wenn sich eine direkte Verbindung zwischen den Knoten i und j befindet und lässt sich dadurch ermitteln, indem man zählt, wie viele Verbindungen n_i von i weglaufen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt dann nämlich $P_{ij} = \frac{1}{n_i}$ also eins geteilt durch die Anzahl der angrenzenden Verbindungen. Fasst man alle diese Wahrscheinlichkeiten in einer Matrix P_{ij} zusammen, so lässt sich ein Zeitschritt mittels Matrix-Vektormultiplikation

$$\pi_t \cdot P = \pi_{t+1}$$

beschreiben.

Da aufgrund Ottokars Vergesslichkeit immer die gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten vorkommen ist die Matrix P zu jedem Zeitschritt die gleiche (**Markoveigenschaft**). Man kann das Zerfließen des Wahrscheinlichkeitsvektors also mit folgender Gleichung darstellen:

$$\pi_t = \pi_0 \cdot P^t$$

Mit hilfe dieser Simulationsmöglichkeit kann man (mit einem Computerprogramm) berechnen, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung Ottokar zu finden zerfließt und man erkennt, dass sich Ottokar in dieser Thermalisierungsphase am ehesten auf **Knoten 5** zu finden ist. Dies ist anschaulich, da es in der näheren Umgebung des Startknotens derjenige Knoten mit den meisten Verbindungen (vier) ist.